Alphamaths.

4°MATH.

COURS.

1.

NOMBRES COMPLEXES.

[redacted]

I/-RAPPELS:

1°- L'imaginaire i : ▲

On appelle i un nombre dont le carré est –1.
On décrète que i est la racine de -1.
Ainsi : $i^2 = -1$. Et alors, aussi : $(-i)^2=-1$

2°- Définition ▲

On appelle corps des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2=-1$
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme (a + ib), où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que celles connues dans $\mathbb{R}$

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

3°-Forme algébrique d'un nombre complexe : ▲

L'écriture z=a+ib est la forme algébrique du nombre complexe z.
a est la partie réelle de z, on note a=*Ré*(z).
b est la partie imaginaire de z, on note b=*Im*(z).

Nombres complexes particuliers :
Soit un nombre complexe z = a + ib avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.
- Si b = 0, on a z = a, z est un réel.
- Si a = 0, on a z = ib, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Conjugué d'un nombre complexe :
Soit z un nombre complexe de forme algébrique a + ib.
On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z}$ = a - ib.

Opérations dans $\mathbb{C}$:
Les opérations sur les nombres complexes (somme, produit, quotient, opposé, inverse, puissance …) sont analogues aux celles dans IR.

Egalité de deux complexes :
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow (a; b) = (a'; b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Conséquence : z=a+ib est nul $\Leftrightarrow$ a=b=0.

4°- Forme trigonométrique d'un nombre complexe : ▲

Module d'un nombre complexe :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique a + ib.

On appelle module de z le nombre réel positif r= $\sqrt{a^2+b^2}$

On note r=|z|.

Argument d'un nombre complexe (non nul) :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique a + ib et de module r.

On appelle argument de z tout angle θ vérifiant : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

On note Arg(z)≡ $\theta[2\pi]$.

Remarque : un complexe admet plusieurs arguments.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe (non nul) :

La forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul est :

z = r. (cosθ + i sinθ), où: r=|z|∈ IR^*_+ et θ = Arg(z) ∈ IR.

Propriétés sur les modules :

|z|=0 ⇔ z=0 ; |-z|=|z| ; $|\bar{z}|=|z|$; |z + z'| ≤ |z|+|z'|

|zz'|=|z|.|z'| ; $|z^n| = |z|^n$, $n\in IN^*$; si z'≠0 alors |1/z'|=1/|z'|

et |z/z'|=|z|/|z'|

$z\bar{z} = |z|^2$ (donc $z\bar{z} \in IR+$) ; si z≠0 alors $1/z=\bar{z}/|z|^2$.

Propriétés sur les arguments :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

- arg(zz') ≡ arg z + arg z' [2π]
- arg (1/z)≡- arg z [2π]
- arg(z/z')≡ arg z - arg z' [2π]
- arg (z^n) ≡ n arg z [2π]
- arg ($\bar{z}$) ≡- arg z [2π]
- arg (-z) ≡ arg z + π [2π]

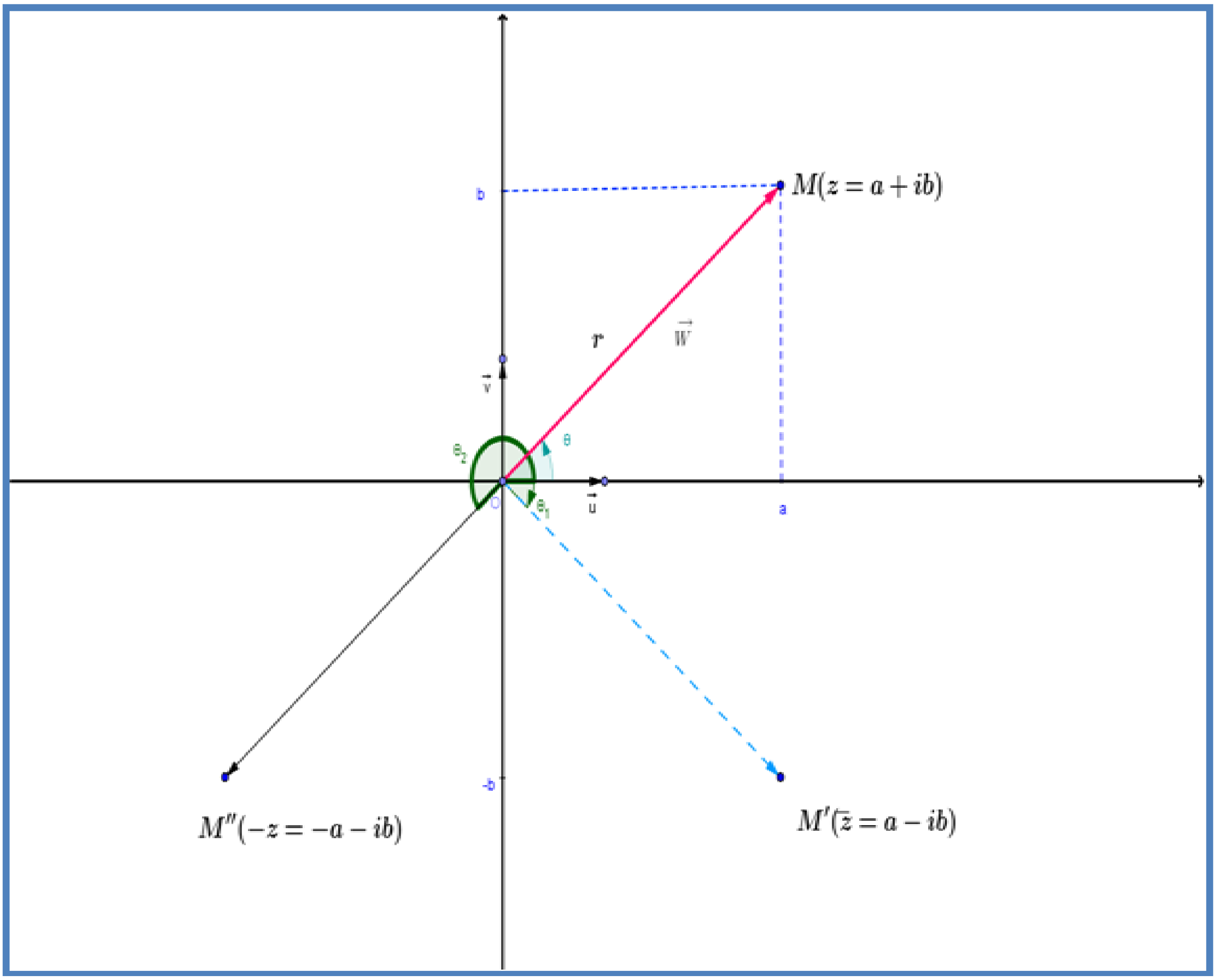
II/- NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE.

Le plan (P) rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ est appelé **plan complexe.**

1°- affixe d'un point - affixe d'un vecteur : ▲

A tout nombre complexe $z=a+ib$, on peut associer dans (P)
Le point M $(a;\ b)$ ou le vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{OM}(a,\ b)$.

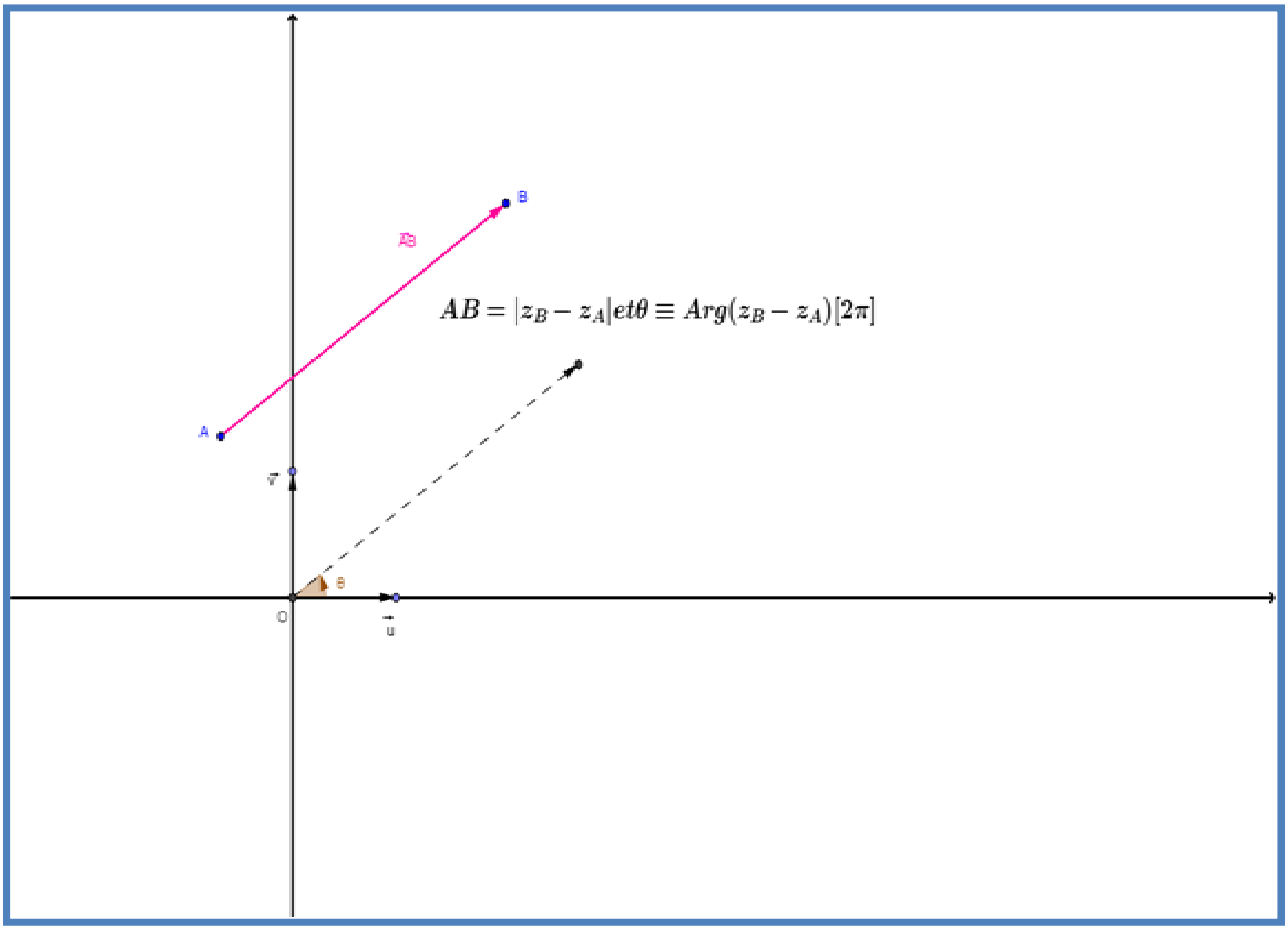
- La distance OM : $r=|z|$
- L'angle $(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OM}})$: $\theta=\text{Arg}(z)$
- Le point $M'=S_{(O,\vec{u})}(M)$: M' $(\bar{z}=a-ib)$ et $(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OM'}})=\theta_1=-\theta$
- Le point $M''=S_O(M)$: M'' $(-z=-a-ib)$ et $(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OM''}})=\theta_2=\theta+\pi$



2°- avec deux points :

Soient A et B deux points distincts de (P) d'affixes respectifs z_A et z_B.

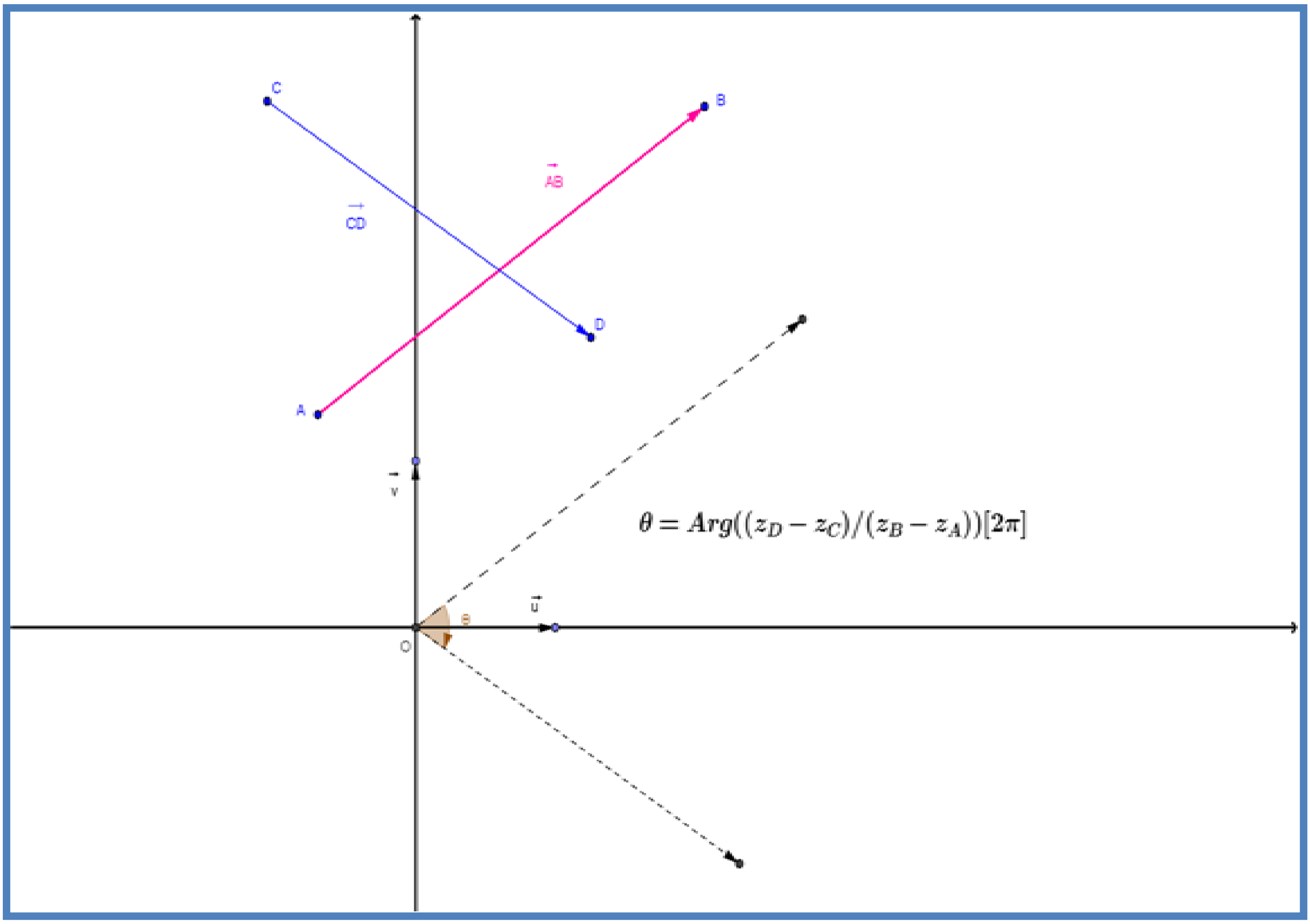
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- Distance entre A et B : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$.
- L'angle formé par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$: $\theta = \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AB})} \equiv \text{Arg}\,(z_B - z_A)\ [2\pi]$.



3°- avec deux vecteurs :

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs de (P), où A (z_A) ; B (z_B) ; C (z_C) et D (z_D) sont des points distincts de(P).

- L'angle formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$: $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv \text{Arg}\,\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est réel.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pure.



C
B
$\vec{AB}$
$\vec{CD}$
D
A
$\vec{v}$
$\theta = Arg((z_D - z_C)/(z_B - z_A))[2\pi]$
$\vec{u}$
θ
O